Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Seleção de Mestrado: Análise Real

Soluções

1. Assinale se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira (V) ou falsa (F) justificando de forma breve sua resposta ou através de um contra-exemplo.

   (a) ( ) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = 1$;

   Solução: Falso, pois $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{2} > 1$.

   (b) ( ) Toda função $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivável com $f'(x) > 0$ em todo ponto é crescente;

   Solução: Verdadeiro. Se $c < d$ em (a, b), pelo Teo. do Valor Médio vale que $f(d) - f(c) = f'(e)(d - c)$, onde $e \in (c, d)$. Daí segue a afirmação.

   (c) ( ) A função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$, se x é racional, e $f(x) = 0$, se x é irracional é integrável.

   Solução: Falso. Somas inferiores sempre zero e somas superiores sempre 1, ou conjunto das descontinuidades não tem medida nula.

2. Sejam K um compacto em $\mathbb{R}$ e $f : K \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitz. Mostre que f é Lipschitz.

   Solução: Suponha que f não é Lipschitz. Então, existem sequências (x_k) e (y_k) tais que $\frac{|f(x_k)-f(y_k)|}{|x_k-y_k|} > k$, onde $x_k \neq y_k$ para todo k natural. Existem subsequências $(x_{k_i})_i$ e $(y_{k_i})_i$ convergentes, onde $(x_{k_i})_i$ tende para a e $(y_{k_i})_i$ tende para b, com ambos os limites pertencentes a K. Além disso, devemos ter $a = b$, caso contrário o limite $\lim_i |y_{k_i} - x_{k_i}| > 0$, e visto que $|f(x) - f(y)|$ (para todo $x, y \in K$) é limitada superiormente por uma constante M, temos que $k < \frac{|f(x_{k_i})-f(y_{k_i})|}{|x_{k_i}-y_{k_i}|} < \frac{M}{|x_{k_i}-y_{k_i}|} \longrightarrow \frac{M}{|a-b|}$, o que é uma contradição. Portanto, $a = b$. Isto implica que, dado $\epsilon > 0$, para i suficientemente grande temos que $(x_{k_i})_i$ e $(y_{k_i})_i$ pertencem a bola $B(a, \epsilon)$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que f é Lipschitz nesta bola com constante de Lipschitz B. Isto é uma contradição pois teríamos que

$$k_i < \frac{|f(x_{k_i}) - f(y_{k_i})|}{|x_{k_i} - y_{k_i}|} \leq B,$$

   para todo i.

3. Seja $f : [0; +\infty)$ uma função convexa e derivável. Mostre que, se existem $L > 1$ e $A, B > 0$ tais que

$$f(2x) \leq L(f(x) + 1) \quad \text{e} \quad f(x) \leq Bx,$$

para cada $x \geq A$ então f' é limitada em $[A, +\infty)$

Solução: Como f é convexa, usando as hipótese, temos que

$$f'(x) \leq \frac{f(2x) - f(x)}{2x - x} \leq \frac{L(f(x) + 1) - f(x)}{x} = \frac{(L-1)f(x)}{x} + \frac{L}{x} \leq (L-1)B + \frac{L}{A},$$

para $x \geq A$. Por outro lado, como f é convexa temos que f' é não-decrescente. Consequentemente $f'(x) \geq f'(A)$.

4. Sejam I um intervalo, $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, $\phi : I \to [a, b]$ e $\psi : I \to [a, b]$ duas funções de classe C^1 e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que, se $F : I \to \mathbb{R}$ é definida por

$$F(x) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt,$$

então F é de classe C^1 e $F'(x) = f(\psi(x)) \cdot \psi'(x) - f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)$, para cada $x \in I$.

Solução: Definindo $G(y) = \int_a^y f(t)dt$ temos que $G \in C^1([a, b])$ e $G'(y) = f(y)$. Usando as propriedades da integral, temos $F(x) = G(\psi(x)) - G(\phi(x))$. Como ϕ, ψ e G são de classe C^1 temos que F é de classe C^1 e, pela regra da cadeia concluímos que $F'(x) = f(\psi(x)) \cdot \psi'(x) - f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)$.

5. Mostre que a sequência de funções $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definidas por $f_n(x) = x^2 + \dfrac{x^n}{n}$ converge uniformemente para uma função derivável f e a sequência das derivadas f_n' convergence simplesmente, mas $f' \neq \lim_n f_n'$.

Solução: Considere $f(x) = x^2$; Note que $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$ e daí segue a convergência uniforme. Porém, $f_n'(x) \to 2\chi_{[0,1)}(x) + 3\chi_{\{1\}}(x) \neq f'(x)$, para cada $x \in [0, 1]$.